

Trigonometría

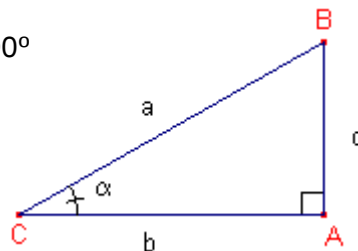
Resolución de triángulos.

Razones trigonométricas de un ángulo agudo.

Consideraremos el triángulo rectángulo $\triangle ABC$ tal que $A = 90^\circ$

Recordemos que en triángulo rectángulo cualquiera se cumplía el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$



Definimos seno del ángulo α y lo representamos por $\text{sen } \alpha$

$$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

Definimos coseno del ángulo α y lo representamos por $\text{cos } \alpha$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$$

Definimos tangente del ángulo α y lo representamos por $\text{tg } \alpha$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{CA}} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$$

Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.

Sea el punto $Q(x,y)$

Consideramos la circunferencia de centro O que pasa por el punto Q y tiene radio r .

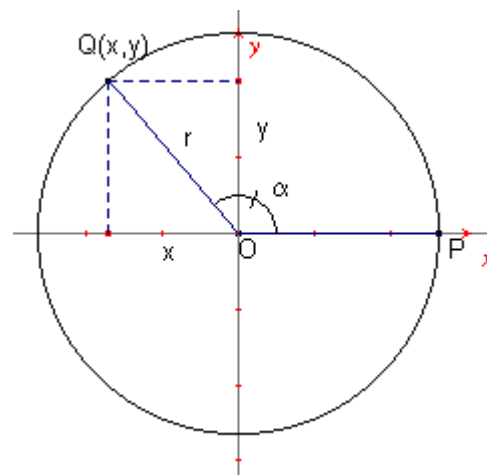
Consideramos el ángulo $\alpha = \angle POQ$

Definimos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{y}{r}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{y}{x}$$



Relaciones fundamentales entre las razones trigonométricas.

Dado un ángulo α se cumplen las siguientes relaciones:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}$$

Estas dos identidades se llaman relaciones fundamentales de la trigonometría.

Uso de la calculadora:

Modos angulares de la calculadora:

MODE DEG medidas sexagesimales

MODE GRA medidas centesimales

MODE RAD medidas en radianes

Conociendo el ángulo α se pueden calcular las razones trigonométricas con las teclas $\sin$ $\cos$ $\tan$

Ejemplo:

Calcula $\operatorname{tg} 43^\circ 25' 50''$, $\operatorname{sen} 50^\circ 30'$,

Con calculadoras antiguas:

43	° ' ''	25	° ' ''	50	° ' ''	tan	=	0.9467
50	° ' ''	30	° ' ''	sin	=	0.7716		

Con calculadoras nuevas

tan	43	° ' ''	25	° ' ''	50	° ' ''	=	0.9467
sen	50	° ' ''	30	° ' ''	=	0.7716		

Conociendo las razones trigonométricas del ángulo α podemos calcular el ángulo α con las teclas $\sin^{-1}$ $\cos^{-1}$ $\tan^{-1}$

Ejemplo:

Calcula el ángulo α tal que $\operatorname{sen} \alpha = 0.34$. $\alpha = \arcsin(0.34)$

Con calculadoras antiguas:

0.34	$\sin^{-1}$	SHIFT	° ' ''	19°52'37''
------	-------------	-------	--------	------------

Con calculadoras nuevas:

$\sin^{-1}$	0.34	=	SHIFT	° ' ''	19°52'37''
-------------	------	---	-------	--------	------------



Resolución de triángulos rectángulos.

Resolver un triángulo es determinar los tres lados y los tres ángulos.

Con la ayuda del teorema de Pitágoras, de las razones trigonométricas, y de la calculadora se puede resolver cualquier triángulo rectángulo. Veamos los siguientes ejercicios:

Problema 1:

Del triángulo rectángulo $\triangle ABC$ tal que $A = 90^\circ$ conocemos
 $a = 5\text{cm}$, $b = 4\text{cm}$

Determina todos los lados, los ángulos y el área del triángulo.

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$5^2 = 4^2 + c^2, \quad 25 = 16 + c^2, \quad c^2 = 9$$

Entonces $c = 3$.

Aplicando cualquier razón trigonométrica podemos calcular el ángulo C.

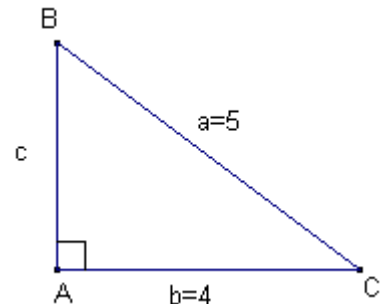
$$\cos C = \frac{b}{a}, \quad \cos C = \frac{4}{5} = 0.8$$

Con la ayuda de la calculadora $C = \arccos 0.8 = 36^\circ 52' 12''$

Sabiendo que los tres ángulos de un triángulo suman 180° ($A + B + C = 180^\circ$)

Tenemos que $B + C = 90^\circ$, entonces $B = 90^\circ - C = 90^\circ - 36^\circ 52' 12'' = 53^\circ 7' 48''$

Por ser el triángulo rectángulo, el área es $S = \frac{b \cdot c}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6\text{cm}^2$



Problema 2:

Para subir al Miquelet de Valencia utilizamos una escalera exterior de 55m, que forma con la horizontal un ángulo de $67^\circ 36'$.

Con estos datos calcula la altura del Miquelet.

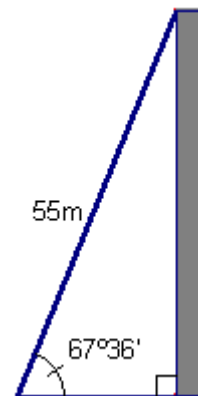
Notemos que la horizontal, y el Miquelet forman un ángulo recto.

Sea x la altura del Miquelet,

Utilizando la razón trigonométrica seno,

$$\sin 67^\circ 36' = \frac{x}{55}$$

Entonces, $x = 55 \cdot \sin 67^\circ 36' = 50.85\text{m}$



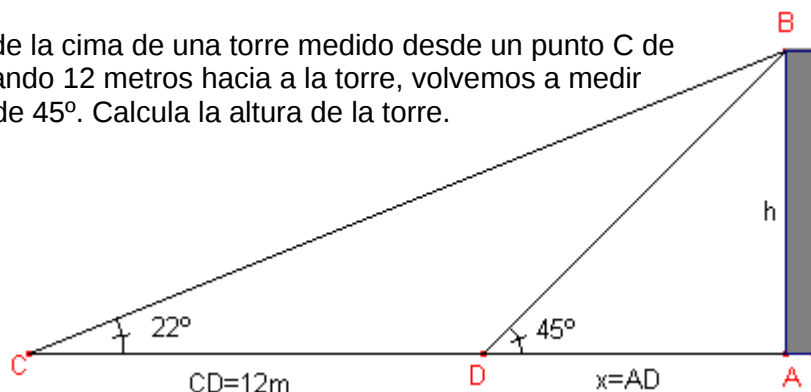
Problema 3:

El ángulo de elevación de la cima de una torre medido desde un punto C de la horizontal es de 22° . Avanzando 12 metros hacia a la torre, volvemos a medir El ángulo de elevación que es de 45° . Calcula la altura de la torre.

Solución:

Dibujamos el gráfico siguiente:

Sea $x = \overline{AD}$, sea $h = \overline{AB}$



Sea el triángulo rectángulo $\triangle ABC$ $\text{tg} 22^\circ = \frac{h}{12+x}$

Sea el triángulo rectángulo $\triangle ABD$ $\text{tg} 45^\circ = \frac{h}{x}$

Con la ayuda de la calculadora $\text{tg} 22^\circ = 0'4040$, $\text{tg} 45^\circ = 1$

Consideramos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} h = (12+x)\text{tg} 22^\circ \\ h = x \cdot \text{tg} 45^\circ \end{cases} \quad \text{substituyendo} \quad \begin{cases} h = (12+x) \cdot 0'4040 \\ h = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} h = x \\ x = (12+x) \cdot 0'4040 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h = x \\ x = 4.8480 + 0'4040x \end{cases}$$

$$\begin{cases} h = 8'1342\text{m} \\ x = 8'1342\text{m} \end{cases}$$

Entonces la altura de la torre es 8'1342m

Problema 4:

Calcula el lado y la apotema de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 5cm.

Solución:

Sea $r = \overline{OA} = 5$ el radio de la circunferencia circunscrita al pentágono regular.

Sea el lado del pentágono $x = \overline{AB}$

Sea la apotema del pentágono $y = \overline{OC}$

El ángulo $\angle AOB = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$

Consideramos el triángulo isósceles $\triangle ABO$

La altura del triángulo divide al triángulo $\triangle ABO$ en dos triángulos rectángulos iguales.

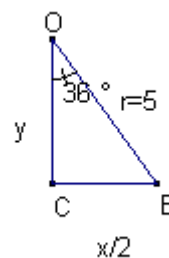
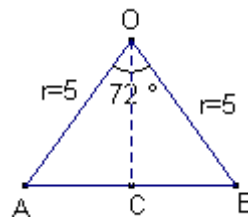
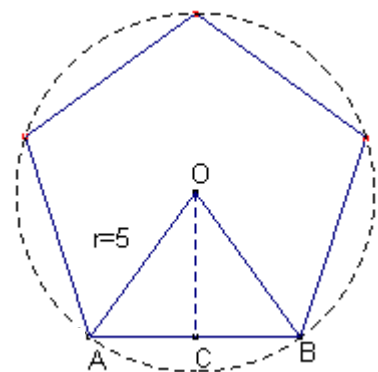
Consideramos el triángulo rectángulo $\triangle CBO$

El ángulo $\angle COB = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$

Sean, $\overline{CB} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{x}{2}$ $\overline{OC} = y$

Aplicando las razones trigonométricas:

$$\text{sen} 36^\circ = \frac{\overline{CB}}{\overline{OB}} = \frac{\frac{x}{2}}{5} \quad \text{sen} 36^\circ = \frac{x}{10}$$





Haciendo uso de la calculadora:

$0'5878 = \frac{x}{10}$, entonces el lado del pentágono mide $x = 5'878\text{cm}$

$$\cos 36^\circ = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{y}{5}$$

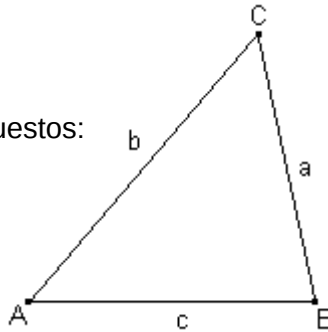
Usando la calculadora:

$0'8090 = \frac{y}{5}$, entonces la apotema del pentágono mide $y = 4'045\text{cm}$

Teorema de los senos

Los lados de un triángulo $\triangle ABC$ son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$



Teorema del coseno.

Sea el triángulo $\triangle ABC$. Se cumplen las siguientes igualdades.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$

Cálculo del área de un triángulo.

$$S = \frac{b \cdot c \cdot \sin \hat{A}}{2} \quad S = \frac{a \cdot c \cdot \sin \hat{B}}{2} \quad S = \frac{a \cdot b \cdot \sin \hat{C}}{2}$$

Para resolver los triángulos, es de gran ayuda tener nociones de dibujo.

Casi todos los problemas se pueden dibujar con regla, escuadra, compás y transportador de ángulos.

Problema 5:

Resuelve el triángulo $\triangle ABC$, conocidos

$$a = 12, \hat{B} = 45^\circ, \hat{C} = 105^\circ$$

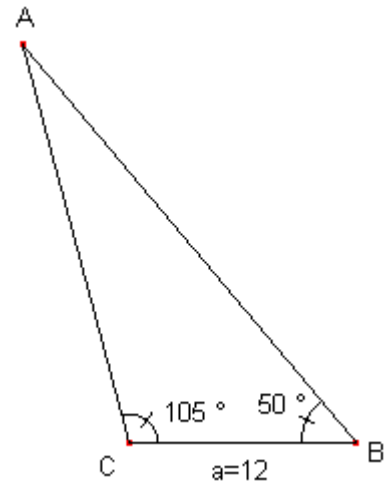
Solución:

Las incógnitas son $b, c, \hat{A}$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^\circ - (45^\circ + 105^\circ) = 30^\circ$$

A partir del teorema de los senos:





$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

$$\frac{12}{\sin 25^\circ} = \frac{b}{\sin 50^\circ} \Rightarrow b = 12 \cdot \frac{\sin 50^\circ}{\sin 25^\circ} \approx 21'75$$

$$\frac{12}{\sin 25^\circ} = \frac{c}{\sin 105^\circ} \Rightarrow c = 12 \cdot \frac{\sin 105^\circ}{\sin 25^\circ} \approx 27'43$$

Problema 6:

Resuelve el triángulo $\triangle ABC$, conocidos $a = 12$, $b = 9$, $\hat{C} = 35^\circ$

Solución:

Las incógnitas son c , $\hat{A}$, $\hat{B}$

A partir del teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$

$$c^2 = 12^2 + 9^2 - 2 \cdot 12 \cdot 9 \cdot \cos 35^\circ$$

$$c^2 = 225 - 176'94 \Rightarrow c^2 = 48'06 \Rightarrow c = \sqrt{48'06} \approx 6'93$$

Para calcular los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ aplicaremos el teorema del coseno.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{a^2 - (b^2 + c^2)}{-2bc}$$

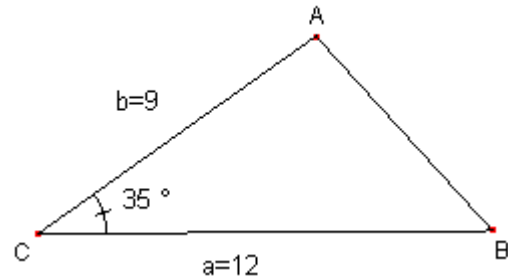
$$\cos \hat{A} = \frac{12^2 - (9^2 + 48'06)}{-2 \cdot 9 \cdot 6'93} = -0'1198$$

Usando de la calculadora:

$$\hat{A} = \arccos(-0'1198) \approx 96^\circ 53'$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ, \text{ por tanto,}$$

$$\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 180^\circ - (35^\circ + 96^\circ 53') \approx 48^\circ 7'$$



Problema 7:

Resuelve el triángulo $\triangle ABC$, conocidos $a = 16$, $b = 8$, $c = 12$

Solución:

Las incógnitas son $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$

Podemos observar que el problema tiene solución, porque,

$$a + b > c$$

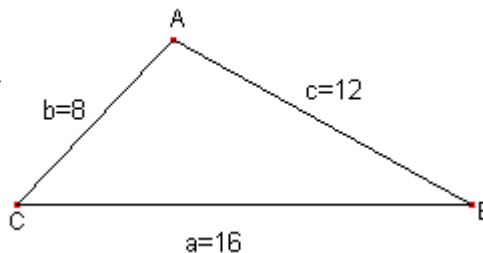
$$a + c > b$$

$$b + c > a$$

Aplicando el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{a^2 - (b^2 + c^2)}{-2bc}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{16^2 - (8^2 + 12^2)}{-2 \cdot 8 \cdot 12} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{-1}{4}$$



Con la ayuda de la calculadora $A = \arccos\left(\frac{-1}{4}\right) \approx 104^\circ 29'$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \Rightarrow \cos \hat{B} = \frac{b^2 - (a^2 + c^2)}{-2ac}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{7}{8} \text{ Con la ayuda de la calculadora } \hat{B} = \arccos\left(\frac{7}{8}\right) \approx 28^\circ 57'$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ, \text{ por tanto,}$$

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (104^\circ 29' + 28^\circ 57') \approx 46^\circ 34'$$

Problema 8:

Resuelve el triángulo $\triangle ABC$, conocidos
 $a = 60$, $b = 30$, $\hat{B} = 25^\circ$

Solución:

Las incógnitas son c , $\hat{A}$, $\hat{C}$

Aplicando el teorema de los senos,

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{60}{\sin \hat{A}} = \frac{30}{\sin 25^\circ}$$

$$\sin \hat{A} = \frac{60 \cdot \sin 25^\circ}{30} = 0.84524$$

Con la ayuda de la calculadora:

$$A = \arcsin(0.84524) \approx \begin{cases} 57^\circ 42' \\ 122^\circ 18' \end{cases}$$

El problema tiene dos soluciones:

Primera solución:

$$\text{Si } \hat{A} \approx 57^\circ 42'$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ, \text{ por tanto,}$$

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) \approx 97^\circ 18'$$

Por el teorema de los senos:

$$c = a \cdot \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{A}} = \frac{60 \cdot \sin 97^\circ 18'}{\sin 57^\circ 42'} \approx 70'41$$

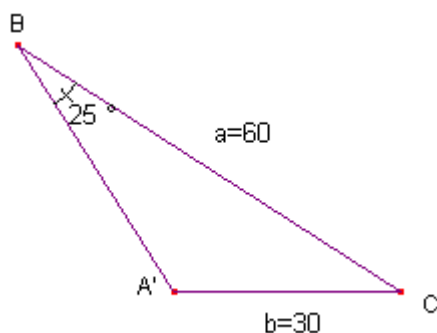
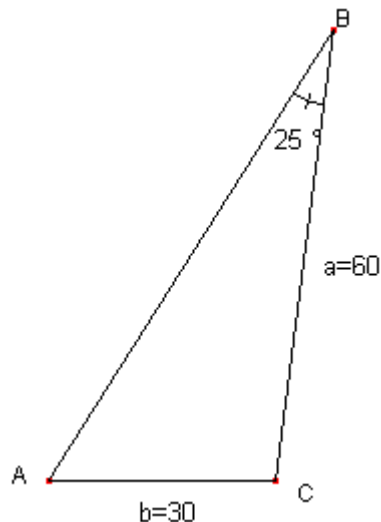
Segunda solución:

$$\text{Si } \hat{A} \approx 122^\circ 18'$$

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) \approx 32^\circ 42'$$

Por el teorema de los senos:

$$c = a \cdot \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{A}} = \frac{60 \cdot \sin 32^\circ 42'}{\sin 122^\circ 18'} \approx 38'35$$





Problema 9:

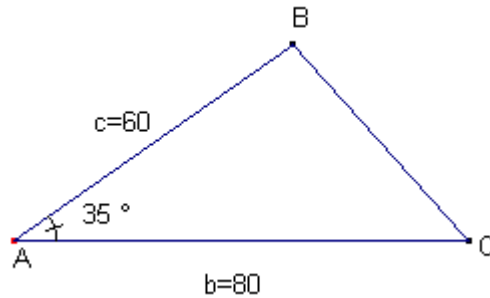
Calcula el área del triángulo $\triangle ABC$ conocidos $b = 80\text{cm}$, $c = 60\text{cm}$, $\hat{A} = 35^\circ$

Solución:

El área del triángulo es

$$S = \frac{b \cdot c \cdot \sin \hat{A}}{2}, \text{ por tanto,}$$

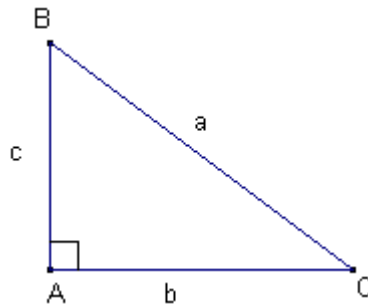
$$S = \frac{bc \cdot \sin \hat{A}}{2} = \frac{80 \cdot 60 \cdot \sin 35^\circ}{2} \approx 1375'58\text{cm}^2$$



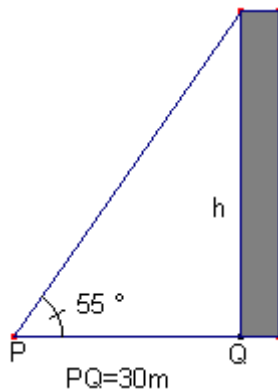
Problemas propuestos de triángulos

1 Resuelve los triángulos rectángulos $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$ conocidos:

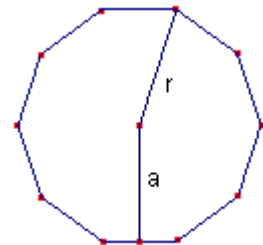
- a) $a = 100\text{cm}$, $b = 7\text{cm}$
- b) $b = 25\text{m}$, $c = 35\text{m}$
- c) $a = 10\text{cm}$, $B = 40^\circ 35'$
- d) $b = 75\text{m}$, $B = 55^\circ$
- e) $b = 10\text{cm}$, $C = 32^\circ 30'$
- f) $c = 10\text{cm}$, $\sin C = \frac{1}{5}$
- g) $b = 10\text{m}$, $\text{tg } C = 5$



2 Calcula la altura de la torre.



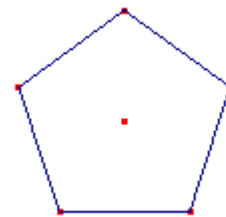
3 Calcula el área y la apotema de un decágono regular de lado 20cm.



4 Calcula el perímetro y el área de un decágono regular de apotema 10cm.

5 Calcula el lado y el área de un decágono regular inscrito en una circunferencia de radio 10cm

6 Calcula el área y la apotema de un pentágono regular de perímetro 100cm.



7 Calcula los ángulos y el lado de un rombo de diagonales 60cm, 80cm.

8 Calcula el área y el perímetro de un dodecágono regular inscrito en una circunferencia de 10cm de radio.

9 El área de un triángulo rectángulo es $6m^2$ y la hipotenusa mide 5m. Calcula los ángulos y los catetos del triángulo rectángulo.

10 Calcula la altura de una torre, sabiendo que el ángulo de elevación desde un punto A y la horizontal es de 45° , que desde un punto B a 25m del punto A y más cerca de la torre el ángulo de elevación es de 60° .

11 Resuelve:

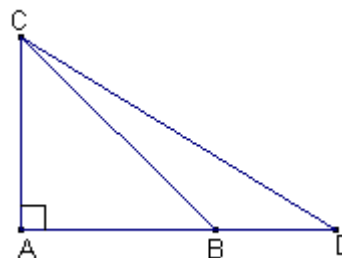
a)

Datos conocidos:

$\overline{BD} = 10cm$, $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle ADC = 45^\circ$

Incógnitas:

$\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\angle BCD$



b)

Datos conocidos:

$\overline{CD} = 10cm$, $\overline{AB} = 4cm$, $\angle ADC = 25^\circ$

Incógnitas:

$\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\angle BCD$

c)

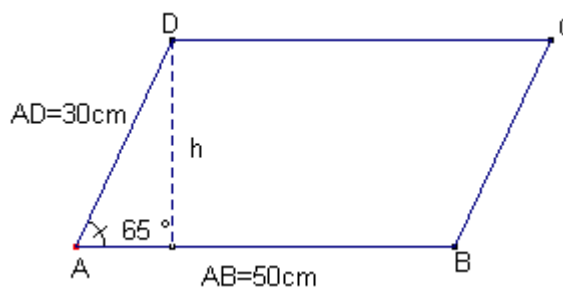
Datos conocidos:

$\overline{BC} = 20cm$, $\angle ACB = 30^\circ$, $\angle BCD = 25^\circ$

Incógnitas:

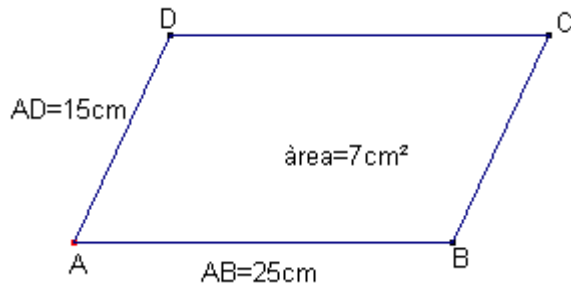
$\overline{AC}$, $\overline{CD}$, $\angle BDC$

12 Determina el área del paralelogramo siguiente:

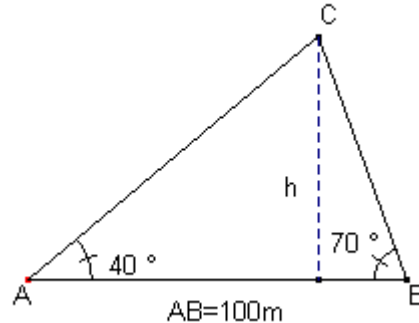




13 Determina los ángulos del paralelogramo siguiente:

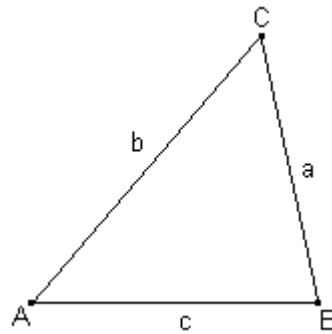


14 Calcula la altura h de la siguiente figura:



15 Resuelve los siguientes triángulos conocidos:

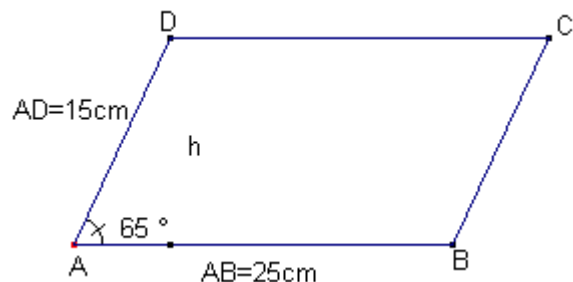
- a) $b = 20\text{cm}$, $c = 35\text{cm}$, $A = 55^\circ$
- b) $a = 15\text{cm}$, $b = 25\text{cm}$, $c = 35\text{cm}$
- c) $a = 20\text{cm}$, $A = 35^\circ$, $B = 75^\circ$
- d) $c = 15\text{cm}$, $A = 25^\circ$, $B = 65^\circ 30'$
- e) $a = 30\text{cm}$, $b = 55\text{cm}$, $B = 80^\circ$
- f) $a = 10\text{cm}$, $b = 10\text{cm}$, $c = 8\text{cm}$
- g) $a = 10\text{cm}$, $b = 45\text{cm}$, $C = 30^\circ 45'$
- h) $a = 20\text{cm}$, $c = 60$, $A = 25^\circ$



16 Calcula el área de los triángulos conocidos:

- a) $a = 25\text{cm}$, $c = 35\text{cm}$, $B = 55^\circ$
- b) $a = 10\text{cm}$, $b = 25\text{cm}$, $c = 30\text{cm}$
- c) $c = 25\text{cm}$, $A = 35^\circ$, $B = 75^\circ$
- d) $a = 30\text{cm}$, $b = 60\text{cm}$, $B = 80^\circ$

17 En el siguiente paralelogramo calcula las diagonales.



18 Calcula la longitud de los lados de un triángulo isósceles sabiendo que la altura sobre el lado desigual mide 15cm y el ángulo desigual 80° .

19 Resuelve un triángulo isósceles sabiendo que los lados iguales miden 10cm y el área mide 40cm^2 .